ЛА Касторян 03.12.12

Матрица на линейно изображение на крайномерни пространства. Трансформация на матрицата на линейно изображение при смяна на базисите

Лема
Нека $f: U \to V$ е линейно изображение $u = (u_1 \dots u_m)$ за $\forall u_i \in U$. Нека $A \in M_{m \times n}(F)$. Тогава uA е наредена n-торка вектори и $f:(uA) = f(u)A$, където $f(u) = (f(u_1) \dots f(u_m))$

Док-во
За $\forall 1 \le j \le n$, j-тата компонента на $f(uA)$ е $f(uA)_j = f(u_1 \dots u_m)\begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{mj} \end{pmatrix} =$

$= f\left(\sum_{s=1}^{m} A_{sj} u_s\right) \overset{f \text{ е}}{\underset{\text{лин}}{=}} \sum_{s=1}^{m} A_{sj} f(u_s) = f(u_1) \dots f(u_m) \begin{pmatrix} A_{1j} \\ A_{mj} \end{pmatrix} =$

$f(u)(A)_j$-ти стълб $= (f(u)A)_j$-ти стълб

Деф.
Нека $e = (e_1 \dots e_n)$ е базис на линейно пространство U, $f = (f_1 \dots f_m)$ е базис на V, $f: U \to V$ е линейно изображение. Тогава матрицата

$$A = \begin{matrix} f_1 \\ \\ f_m \end{matrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

образувана по стълбовете от координатите на $f(e_1) \dots f(e_n)$ спрямо базиса $f_1 \dots f_m$ се нарича матрица на f спрямо базисите e и f. Матрицата A на f спрямо e и f определя еднозначно f защото линейните изображения се задават еднозначно от образите на базис
Еквивалентно определение на A е следното

$$f(e) = fA$$

Примери

1) $O: U \to V$ т.е. $O(u) = \vec{0}_V$ има матрица $0_{m \times n}$ спрямо произволни базиси $e = (e_1 \dots e_n)$ на U и $f = (f_1 \dots f_m)$ на V

2) Разглеждаме диференцирането на полиноми $\frac{d}{dx}: \mathbb{R}^{(n+1)}_{[x]} \to \mathbb{R}^{(n)}_{[x]}$. Фиксираме базиса $1, x, \frac{x^2}{2!} \dots \frac{x^n}{n!}$ на $\mathbb{R}^{(n+1)}_{[x]}$ има тогава матрица $\frac{d}{dx}$ в този базис на $\mathbb{R}^{(n+1)}_{[x]}$ и базис $1, x, \frac{x^2}{2!} \dots \frac{x^n}{n!}, \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ на $\mathbb{R}^{(n+1)}_{[x]}$ е

$$\begin{matrix} x^{(n+1)} \\ \hline (n+1)! \end{matrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & \\ & 0 & 1 & \ddots & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{pmatrix} \in M_{n \times (n+1)}(\mathbb{R}), \quad \frac{d}{dx} = \frac{J x^{J-1}}{J!} = \frac{x^{J-1}}{(J-1)!}$$

спрямо базис $1, x \dots x^{n-1}$ на $\mathbb{R}^{(n)}_{[x]}$ матрицата

$$\begin{matrix} & & x & & x^n \\ e & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \\ & 0 & 2 & 0 & \\ & & & 3 & \ddots \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \end{pmatrix} & \\ x^{n-1} & & & & \end{matrix}$$

Деф

Ако $f: U \to U$ е линеен оператор а $e = (e_1 \dots e_n)$ е базис на U то матрицата на f спрямо базиса e е следната

Равносилно $f(e) = eA$ $\quad A = \begin{matrix} e_1 \\ \\ e_n \end{matrix} \begin{pmatrix} | & & | \\ f(e_1) & \dots & f(e_n) \\ | & & | \end{pmatrix}$

$Id(e_i) = e_i$

Матрицата на тъждественото изображение $Id: U \to U$ спрямо кой и да е базис $e_1 \dots e_n$ на U е $E_n = \begin{matrix} e_1 \\ \\ e_n \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$. Нека вектора $u \in U$ има координати $x \in M_{n \times 1}(F)$ спрямо базиса

$e = (e_1 - e_n)$ т.е. $u = ex$. Нека $\ell(u) = fy$ за $y \in M_{m\times 1}(F)$ т.е. нека y са координатите на $\ell(u)$ спрямо f. Тогава $fy = \ell(u) = \ell(ex) \overset{\text{лема}}{=} \ell(e)x \overset{\text{def}A}{=} (fA)x = f(Ax)$

Сега $f(y - Ax) = \vec{0}_V$ води до $y - Ax = 0_{m\times 1}$ съгласно линейната независимост на векторите $f_1 - f_m$. Оттук $y = Ax$

Трансформация на матрица на линейно изображение при смяна на базисите

Нека $A \in M_{m\times n}(F)$ е матрицата на линейно изображение $\ell: U \to V$ спрямо базис $e = (e_1 - e_n)$ на U и базис $f = (f_1 - f_m)$ на V. Избираме базис $e' = eT$ на U и базис $f' = fS$ на V. Означаваме с $B \in M_{m\times n}(F)$ матрицата на ℓ спрямо базисите e' и f'. Тогава

$$\ell(AT) = \ell(A)T = \ell(e)T = \ell(eT) = \ell(e') = f'B = (fS)B = f(SB)$$

$$\Rightarrow f(\underbrace{AT - SB}_{\in M_{m\times n}}) = (\underbrace{\vec{0}_V - \vec{0}_V}_{n})$$

Съгласно ЛНЗ-ст на векторите $f_1 - f_m$ оттук следва $AT - SB = 0_{m\times n} \Rightarrow \underline{AT = SB}$

В качеството си на матрица на прехода от базиса f', матрицата S е обратима и матрицата $\boxed{B = S^{-1}AT}$. В частност, ако A и $B \in M_{m\times n}(F)$ са матриците на линеен оператор $\ell: U \to U$ спрямо базисите e и $e' = eT$ то $B = T^{-1}AT$

Дефо

Матриците $A, B \in M_{n\times n}(F)$ са подобни ако съществува обратима матрица $T \in M_{n\times n}(F)$ така че $B = T^{-1}AT$

Т6|

Матриците $A, B \in M_{n\times n}(F)$ са подобни тогава и само тогава, когато съществува линеен оператор $\ell : U \to U$ в n-мерно пространство U, който има матрици A и B спрямо някакви бази на U

Дак-во

Доказахме че ако линеен оператор $\ell : U \to U$ има матрици $A, B \in M_{n\times n}(F)$ спрямо базисите $e = (e_1 -- e_n)$ и $e' = eT$ на U то $B = T^{-1}AT$. Оттук A и B са спрегнати

обратно

Нека $B = T^{-1}AT$ за $T \in M_{n\times n}(F)$. Избираме базис $e = (e_1 - e_n)$ на n-мерно пространство U и разглеждаме линейния оператор $\ell : U \to U$ с матрица $A = {}^{e_1}_{e_n}(\ell(e_1) -- \ell(e_n))$, спрямо базис $e = e_1 - e_n$. Ако $e' = eT$ е базис на U с матрица на прехода T от e към e', то матрицата на ℓ спрямо e' е $T^{-1}AT = B$

Събиране и умножение на линейни изображения

Умножение на линейно изображение със скалар. Връзка със съответните операции на матрици

Деф (събиране)
Ако $\varphi: U \to V$ и $\psi: U \to V$ са линейни изображения, $\lambda \in F$, то $\varphi + \psi: U \to V$, $(\varphi+\psi)(u) = \varphi(u) + \psi(u)$ за $\forall u \in U$ се нарича сума на φ и ψ а $\lambda\varphi: U \to V$ $(\lambda\varphi)(u) = \lambda\varphi(u)$ за $\forall u \in U$ се нарича произведение на φ с λ

Лема
Ако $\varphi: U \to V$ и $\psi: U \to V$ са линейни изображения, $\lambda \in F$, то $\varphi+\psi$ и $\lambda\varphi$ са линейни изображения

Док-во
От $(\varphi+\psi)(u_1+u_2) = \varphi(u_1+u_2) + \psi(u_1+u_2) \overset{\varphi\psi}{=}$
$= \varphi(u_1) + \varphi(u_2) + \psi(u_1) + \psi(u_2) = (\varphi+\psi)(u_1) + (\varphi+\psi)(u_2)$ и от $(\varphi+\psi)(\mu u) = \varphi(\mu u) + \psi(\mu u) = \mu[(\varphi+\psi)(u)]$. Следва че $\varphi+\psi$ е линейно изображение. От $(\lambda\varphi)(u_1+u_2) = \lambda\varphi(u_1) + \lambda\varphi(u_2) = (\lambda\varphi)(u_1) + (\lambda\varphi)(u_2)$ и от $(\lambda\varphi)(\mu u) = \lambda\varphi(\mu u) = \lambda\mu\varphi(u) = \mu[(\lambda\varphi)(u)] \Rightarrow \lambda\varphi$ е линейно

Теорема
Множеството $Hom(U,V)$ на линейните изображения $U \to V$ е линейно пространство относно въведените събиране и умножение със скалар

Док-во
Вече проверихме че $Hom(U,V)$ е затворено относно събиране и умножение със скалар
Остава да проверим аксиомите за линейно пространство
1) $(\varphi+\psi)+\theta = \varphi+(\psi+\theta)$ за $\varphi\psi\theta \in Hom(U,V)$
по-точно $[(\varphi+\psi)+\theta](u) = (\varphi+\psi)(u) + \theta(u) =$
$[\varphi(u) + \psi(u)] + \theta(u) \overset{асоц}{=} \varphi(u) + (\psi+\theta)(u) = [\varphi+(\psi+\theta)](u)$

2) $\varphi+\psi=\psi+\varphi$ за $\forall \varphi,\psi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ защото
$(\varphi+\psi)(u)=\varphi(u)+\psi(u)=(\psi+\varphi)(u)$ за $\forall u\in U$

3) Съществува нулево линейно изображение
$0: U\to V$ т.ч. $0+\varphi=\varphi$ за $\forall \varphi\in \mathrm{Hom}(U,V)$ защото
$(0+\varphi)(u)=0(u)+\varphi(u)=\vec{0}_V+\varphi(u)=\varphi(u)$

4) $\forall \varphi\in \mathrm{Hom}(U,V)$ има $-\varphi: U\to V$, $(-\varphi)(u)=-\varphi(u)$ за
$\forall u\in U$ така че $\varphi+(-\varphi)=0$.
$(-\varphi)(u_1+u_2)=(-\varphi)(u_1)+(-\varphi)(u_2)$ и $-\varphi_{\mu(u)}=[(-1)\mu]\varphi(u)=$
$=\mu[(-1)\varphi(u)]=\mu[(-\varphi)(u)]$. Сега $[\varphi+(-\varphi)](u)=$
$\varphi(u)+(-\varphi)(u)=\varphi(u)-\varphi(u)=\vec{0}_V$ гарантира че
$\varphi+(-\varphi)\in 0$

5) $(\lambda+\mu)\varphi=\lambda\varphi+\mu\varphi$ за $\lambda,\mu\in F$, $\varphi\in \mathrm{Hom}(U,V)$
$[(\lambda+\mu)\varphi](u)=(\lambda+\mu)\varphi(u) \overset{\text{Аксиома}}{\underset{3\text{-бV}}{=}} \lambda\varphi(u)+\mu\varphi(u)=(\lambda\varphi+\mu\varphi)(u)$

6) $\lambda(\varphi+\psi)=\lambda\varphi+\lambda\psi$ за $\varphi,\psi\in \mathrm{Hom}(U,V)$ и $\lambda\in F$
$[\lambda(\varphi+\psi)](u)=\lambda\varphi(u)+\lambda\psi(u)=(\lambda\varphi+\lambda\psi)(u)$

7) $(\lambda\mu)\varphi=\lambda(\mu\varphi)$ за $\forall \varphi\in \mathrm{Hom}(U,V)$, $\forall\lambda\in F$, $\forall\mu\in F$
Наистина $[(\lambda\mu)\varphi](u)=(\lambda\mu)\varphi(u) \overset{\text{АЗ}}{\underset{\text{бV}}{=}} \lambda(\mu\varphi(u))=\lambda[(\mu\varphi)(u)]=$
$=[\lambda(\mu\varphi)](u)$ за $\forall u\in U$

8) $1\varphi=\varphi$ за $\forall \varphi\in \mathrm{Hom}(U,V)$ и $1\in F$
$(1\varphi)(u)=1\varphi(u) \overset{\text{А8}}{\underset{\text{бV}}{=}} \varphi(u)$

Т6

Ако линейните изображения $\varphi: U\to V$, $\psi: U\to V$ имат матрици $A,B\in M_{m\times n}(F)$ спрямо базис $e=(e_1,\dots,e_n)$ на U и базиса $f=(f_1,\dots,f_m)$ на V то $\varphi+\psi$ и $\lambda\varphi$ имат матрици $A+B$ съответно λA спрямо базисите e и f

Док-во

$$(\varphi+\psi)(e_j)=\varphi(e_j)+\psi(e_j)=\sum_{s=1}^{m}A_{sj}f_s+\sum_{s=1}^{m}B_{sj}f_s=$$

$\sum_{s=1}^{m} (A+B)_{sj} f_s$. Следователно j-тия стълб на матрицата на $\varphi+\psi$ спрямо базисите e и f съвпада с j-тия стълб на $A+B$ и $A+B$ е матрицата на $\varphi+\psi$ спрямо базисите e и f

$(\lambda\varphi)(e_j) = \lambda\varphi(e_j) = \lambda\left(\sum_{s=1}^{m} A_{sj} f_s\right) = \sum_{s=1}^{m} (\lambda A_{sj} f_s) = \sum_{s=1}^{m} (\lambda A)_{sj} f_s$ показва съвпадение на j-тия стълб на матрицата на $\lambda\varphi$ спрямо базисите e и f със j-тия стълб на λA, така че λA е матрицата на $\lambda\varphi$ спрямо базисите e и f

Следствие

Ако U и V са линейни пространства със $\dim V = m$, $\dim U = n$ то линейното пространство $\mathrm{Hom}(U,V)$ на линейните изображения $\varphi: U \to V$ е изоморфно на линейното пространство на матриците $m \times n$ $M_{m\times n}(F)$, но - точно всеки избор на базис $e = (e_1 - e_n)$ на U и всеки избор на базис $f = (f_1 - f_n)$ на V задава линеен изоморфизъм $P: \mathrm{Hom}(U,V) \to M_{m\times n}(F)$ съпоставящ на линейно изображение $\varphi: U \to V$ матрицата му $P(\varphi) \in M_{m\times n}(F)$ спрямо базисите e и f

Споменахме че изображението $\varphi \mapsto P(\varphi)$ е взаимно еднозначно. От факта че $P(\varphi+\psi) = P(\varphi) + P(\psi)$ и $P(\lambda\varphi) = \lambda P(\varphi)$ следва P е линейно а оттам и линеен изоморфизъм

Деф

Ако $\varphi: U \to V$ и $\psi: V \to W$ са линейни изображения то изображението $\psi\varphi: U \to W$ $(\psi\varphi)(u) = \psi(\varphi(u))$ за $\forall u \in U$ се нарича произведение на φ и ψ. Твърдим че $\psi\varphi$ е линейно

защото $(\Psi\varphi)(u_1+u_2) = \Psi(\varphi(u_1+u_2)) \underset{\text{мн}}{\overset{\varphi e}{=}} \Psi(\varphi(u_1)+\varphi(u_2)) =$
$\underset{\text{мн}}{\overset{\Psi e}{=}} (\Psi\varphi)(u_1)+(\Psi\varphi)(u_2)$ и $(\Psi\varphi)(\lambda u) = \lambda[(\Psi\varphi)(u)]$

Св-ва на произведението на линейни изображения

1) асоциативност
$\mathcal{O}(\Psi\varphi) = (\mathcal{O}\Psi)\varphi$ за $\varphi: U \to V$, $\Psi: V \to W$, $\mathcal{O}: W \to T$
$[\mathcal{O}(\Psi\varphi)](u) = \mathcal{O}(\Psi(\varphi(u))) = [(\mathcal{O}\Psi)\varphi](u)$

2) дистрибутивен закон
$(\varphi+\Psi)\mathcal{O} = \varphi\mathcal{O} + \Psi\mathcal{O}$ за $\varphi: V \to W$, $\Psi: V \to W$,
$\mathcal{O}: U \to V$

3) $(\lambda\Psi)\varphi = \Psi(\lambda\varphi) = \lambda(\Psi\varphi)$ за $\varphi: U \to V$, $\Psi: V \to W$
$[(\lambda\Psi)\varphi](u) = [\Psi(\lambda\varphi)](u)$

Т.Ф.
Нека $e = (e_1 - e_n)$ е базис на U, $f = (f_1 - f_m)$ е базис на V, $g = (g_1 - g_k)$ е базис на W, $\varphi: U \to V$ е линейно изображение със матрица $A \in M_{m \times n}(F)$ спрямо базисите e и f а $\Psi: V \to W$ е линейно изображение с матрица $B \in M_{k \times m}(F)$ спрямо f и g. Тогава матрицата на $\Psi\varphi: U \to W$ спрямо базисите e и g е произведението BA

Док-во
$(\Psi\varphi)(e_j) = \Psi(\varphi(e_j)) = \Psi\left(\sum_{s=1}^{m} A_{sj} f_s\right) = \sum_{s=1}^{m} A_{sj}\Psi(f_s) =$
$= \sum_{s=1}^{m} A_{sj}\left(\sum_{t=1}^{k} B_{ts} g_t\right)$ - разменя на реда на сумиране

$\sum_{t=1}^{k}\left(\sum_{s=1}^{m} B_{ts} A_{sj}\right) g_t = \sum_{t=1}^{k} (BA)_{tj} g_t$ показва съвпадението на j-тия стълб на матрицата на $\Psi\varphi$ спрямо базисите e и g с j-тия стълб на BA откъдето и съвпадението на тези матрици